

Les applications

Exercice 1

Soit l'application f définie de $] -2, 2[$ vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. soit g la restriction de f sur $I =] -2, 0]$
 - a) montrer que g est injective
 - b) montrer que g est une bijection de I vers \mathbb{R}^+ et définir sa réciproque g^{-1}

Exercice 2

On considère l'application f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

- 1) montrer que f est injective
- 2) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f(x)| < 1$ f est-elle surjective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?
- 3) montrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers $] -1, 1[$ puis définir sa réciproque f^{-1}

Exercice 3

Soit l'application f définie sur $] -\infty, -1]$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

- 1) a) montrer que f est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$
 - b) déduire que f est injective
- 2) f est-elle surjective de $] -\infty, -1]$ vers \mathbb{R} ?
- 3) montrer que f est une bijection de $] -\infty, -1]$ vers $] -\infty, 0]$ et déterminer sa réciproque

Exercice 4

Soit l'application f définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

- ① montrer que f est injective
- ② montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}$ f est-elle surjective ?
- ③ montrer que f est bijective de \mathbb{R}^+ vers $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ puis définir sa réciproque

Exercice 5

Soit f l'application définie de \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

- 1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2+1} > x$
- 2) a) montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x) - f(y) = (x - y) \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} - 1 \right)$
 - b) en déduire que f est injective
- 3) f est-elle surjective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?
- 4) montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^{+*} et déterminer sa bijection réciproque

Exercice 6

Soit f l'application définie de $]0, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

- 1) a) montrer que $(\forall x > 0) f(x) > 2$
 - b) En déduire que f est surjective
 - c) f est-elle injective ?
- 2) Déduire que f est bijective puis déterminer sa réciproque

Les applications

3) On considère l'application g définie de $] -3, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 10}{x + 3}$

a) Montrer que $(\forall x > -3) \quad g(x) = f(x + 3)$

b) Dédurre que g est une bijection en déterminant sa réciproque

Exercice 7

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par : $f((x, y)) = (x^2 - y^2, xy)$

1) soit (a, b) un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

a) Montrer que l'équation $x^2 - ax - b^2 = 0$ admet deux solutions distincts $\beta ; \alpha$

b) montrer que $\beta ; \alpha$ ont des signes opposés

2) f est-elle injective ? surjective ? justifier votre réponse

Exercice 8

Soit f une application de E vers F . A et B deux parties de E

1) Montrer que : $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

2) Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) a) montrer que : $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b) Donner une application f telle que : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

c) montrer que si f est injective alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 9

E un ensemble non vide, A une partie de E .

Soit f l'application définie de $P(E)$ vers $P(A) \times P(\bar{A})$ par $f(X) = (A \cap X, X \cap \bar{A})$

☺ soit (X, Y) un élément de $P(A) \times P(\bar{A})$ déterminer $f(X \cup Y)$

☺ montrer que f est une bijection

☺ on considère l'application g définie de $P(A) \times P(\bar{A})$ vers $P(A) \times P(\bar{A})$ par :

$$g(X, Y) = (A - X, \bar{A} - Y)$$

Montrer que $f(X) = g \circ f(\bar{X})$ en déduire que g est surjective

Exercice 10

Soit f l'application définie de $I = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ vers \mathbb{R} vérifiant :

$$(\alpha) \quad (\forall x \in I) \quad f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$$

1) on pose $g(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de I

a) Vérifier que $(\forall x \in I) \quad g(x) \in I$ et calculer $(g \circ g)(x)$

b) déterminer $(g \circ g \circ g)(x)$

2) a) montrer que $(\forall x \in I) \quad f(x) + f((g \circ g)(x)) = \frac{-1}{x-1} + 1$

b) calculer $f(g(x)) + f((g \circ g)(x))$ en fonction de x

c) en déduire les applications f qui vérifient la relation (α)